数理解析研究所講究録
1003 巻 1997 年 15-27

非可換確率空間における半円分布の特徴付け

千葉大理　樋渡　修 (Osamu Hiwatashi)
お茶女大理　吉田 裕亮 (Hiroaki Yoshida)

0 はじめに

非可換代数の上で確率論を展開することは可能である. これらは非可換確率論と呼ばれている. いくつかの非可換確率論の定式化があるが, ここでは D.Voiculescu による free 確率論についてその定義および free 確率論における分布の特徴付け問題に関して得られたいくつかの結果について報告する.

1 章では free 確率論の紹介を中心に行い, 2 章では研究会で報告を行った [HNY] の概略と, その後黒田倫子 (お茶女大理) と共に行った [HKNY] の結果も含めて紹介する.

1 非可換確率空間と free 性

通常の確率空間において独立性の概念は重要な概念である. この独立性を非可換確率論へ自然に拡張することは以前から行われていた. これは tensor 積に基づくものでり, 独立な確率変数の族には可換性が仮定されていた. 非可換性が十分に反映される独立性に代わる概念として, D.Voiculescu によって導入され free 性という概念がある. 本来は, 自由群が生成する作用素環の解析のための道具として導入されたものであるが, free 性, 半円分布, 中心極限定理など通常の確率空間との対比が見事であることもあって, 非可換版として興味深いものとなっている. 標語的に言ってしまえば, 独立性の概念を free 性に置き換えた確率論が free 確率論である.

まず free 性の定義を独立性と対比させながら紹介する.

Ω を base space, Σ を σ-field, また μ を positive で $\mu(\Omega)=1$ を満たす確率測度とし確率空間は, (Ω,Σ,μ) と表記される. もし, $f:\Omega\to\mathbb{C}$ が可積分であれば, 期待値 $E(f)$ は

$$E(f)=\int_{\omega\in\Omega} f(\omega)d\mu(\omega)$$

となる. この形式を代数的に取り扱うことによって非可換確率空間を記述する.

定義 1.1. $(\mathcal{A},\phi)$ が非可換確率空間であるとは, $\mathbb{C}$ 上の unital (1 を含む) 代数 (一般には非可換) $\mathcal{A}$ と $\phi:\mathcal{A}\to\mathbb{C}$ を $\phi(1)=1$ なる線形汎関数の組をいう. $\mathcal{A}$ を単位元を含む C^*- algebra で, ϕ が $\mathcal{A}$ 上の state のとき $(\mathcal{A},\phi)$ は C^*- 確率空間, $\mathcal{A}$ が有限型 von Neumann algebra で ϕ が 正規 trace のとき $(\mathcal{A},\phi)$ を, W^*- 確率空間という. また, 非可換確率空間 $(\mathcal{A},\phi)$ において $a\in\mathcal{A}$ は確率変数と呼ばれる.

通常の確率空間の独立性の概念は以下のように非可換確率空間に拡張される.

定義 1.2. **(独立性)** $(\mathcal{A},\phi)$ を非可換確率空間とし, $\mathcal{A}_i$ $(i\in I)$ を $\mathcal{A}$ の 1 を共有する部分代数とする. このとき, $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ が独立であるとは, 以下の条件が成立するときをいう

(1) 任意の $i_1,i_2\in I(i_1\neq i_2)$ に対して,

$$x_1x_2=x_2x_1 \quad \text{for} \quad x_1\in\mathcal{A}_{i_1} \text{ and } x_2\in\mathcal{A}_{i_2},$$

(2) $x_j\in\mathcal{A}_{i_j}$ (ただし $i_1,i_2,\cdots,i_n$ は全て異なる) について,

$$\phi(x_1x_2\cdots x_n)=\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n).$$

いま 各 $\mathcal{A}_j$ が 1 を含むので (2) は以下の条件 (2)$'$ と同値である.

(2)$'$ $x_j\in\mathcal{A}_{i_j}$, $\phi(x_j)=0$ (ただし, $i_1,i_2,\cdots,i_n$ は全て異なる) について,

$$\phi(x_1x_2\cdots x_n)=0.$$

この独立性の概念は tensor 積の概念に基づいて定義されている. つまり通常の確率変数の独立性を一般化したものである. ここで tensor 積の代わりに free 積を扱うことによって, "独立" の概念を, より非可換性の強い概念に置き換えることを考える. これが D. Voiculescu によって導入された free 性である.

定義 1.3. **(free 性)** $(\mathcal{A},\phi)$ を非可換確率空間とする. $1\in\mathcal{A}_i\subset\mathcal{A}$ $(i\in I)$ を $\mathcal{A}$ の部分代数とする. このとき, $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ が free であるとは, $x_j\in\mathcal{A}_{ij}$ で $\phi(x_j)=0$ ただし, $i_1\neq i_2\neq\cdots\neq i_n$, ならば

$$\phi(x_1x_2\cdots x_n)=0$$

が成り立つときをいう.

部分集合の族 $X_i\subset\mathcal{A}$ が free であるとは, $\{1\}\bigcup X_i$ によって生成された部分代数 $\mathcal{A}_i$ 達が free であるときをいう. 特に, $X_i=\{x_i\}$ のとき, (x_i) は free であるという.

この free 性の定義においては単に隣合う代数が違うということだけを言っているので 2 つの代数が交代で現れることも, もちろん許されていることに注意しなければならない. また, この free 性の定義により, $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ が free であるならば, これらの任意の word の期待値がそれぞれの元の多項式の期待値の積の和として表されることにも注意しなければならない.

すなわち p を, n 変数非可換多項式 とする. free な確率変数の族 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ に対して, 期待値$\phi(p(x_1,x_2,\cdots,x_n))$ は $\prod p_i(\phi(x_i))$ の和の形式に展開することが出来る. ただし, p_i は 1 変数多項式である.

実際, 期待値 $\phi(x_1x_2x_1^2)$ の展開を例にとると, $y^\circ=y-\phi(y)$ $\in$Ker ϕ なる関係式を用いることによって

$$\begin{aligned}
\phi(x_1x_2x_1^2) &= \phi(x_1^\circ x_2x_1^2)+\phi(x_1)\phi(x_2x_1^2)\\
&= \phi(x_1^\circ x_2^\circ x_1^2)+\phi(x_2)\phi(x_1^\circ x_1^2)+\phi(x_1)\phi(x_2x_1^2)\\
&= \phi(x_1^\circ x_2^\circ (x_1^2)^\circ)+\phi(x_1^2)\phi(x_1^\circ x_2^\circ)+\phi(x_2)\phi(x_1^\circ x_1^2)+\phi(x_1)\phi(x_2x_1^2)\\
&= \phi(x_2)\phi(x_1^\circ x_1^2)+\phi(x_1)\phi(x_2x_1^2),
\end{aligned}$$

となり, 多項式 $x_1^\circ x_1^2 = x_1^3 - \phi(x_1)x_1^2$, $x_2x_1^2$ は $x_1x_2x_1^2$ より低い次数の多項式として表示されるので, 議論は帰納的に終了する.

定義 1.4. (分布)　$(\mathcal{A},\phi)$ を非可換確率空間とする. 確率変数 $x \in \mathcal{A}$ の分布とは 1 変数多項式環 $\mathbb{C}[X]$ 上の線形汎関数 μ_x で

$$\mu_x(P(X)) = \phi(P(x)), \quad P \in \mathbb{C}[X]$$

なる関係で定まるものである.

特に, C^*- 確率空間 $(\mathcal{A},\phi)$ においては, $x \in \mathcal{A}$ が自己共役であるならば, 分布 μ_x は $\mathbb{R}$ 上のコンパクトな台を持つ確率測度に拡張される. すなわち

$$\int P(t)d\mu_x(t) = \phi(P(x)), \qquad P \in \mathbb{C}[X]$$

なる確率測度 $d\mu_x$ が一意に存在する.

確率変数 x に対して, $\mu_x(X^n)$ を x の n 次の simple moment という. 確率変数 x は, $\mu_x(X) = 0$ であれば中心的 (centered) であるといい, また, centered な確率変数 x は, $\mu_x(X^2) = 1$ であるとき, 標準 (standard) と呼ばれる.

先に述べたように, free 確率変数の各々の期待値はそれぞれのモーメントの積の線形結合によって表される. 例で見ると

$$\begin{aligned}\phi(x_1x_2x_1^2) &= \phi(x_2)\phi(x_1^\circ x_1^2) + \phi(x_1)\phi(x_2x_1^2)\\ &= \phi(x_2)(\phi(x_1^3) - \phi(x_1)\phi(x_1^2)) + \phi(x_1)(\phi(x_2)\phi(x_1^2))\\ &= \phi(x_1^3)\phi(x_2)\end{aligned}$$

となり, 注意することは, ここで現れる各項は x_1, x_2 について 4 次であるということと, x_1 については全て 3 次, x_2 については全て 1 次の斉次式であるということである. この展開を期待値のモーメント展開とよび, 一般的に各々の項は, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ について, モーメントの次数に関して斉次であり, 各々の項の次数は, それぞれの変数に関して斉次であることがわかる.

通常の確率論の正規分布の役割を果たす, free 確率空間における重要な分布が, 半円分布である. これは, D.Voiculescu の free 中心極限定理の極限分布がこの半円分布であることや, 通常の確率論において正規分布の持つ性質を free 確率空間においてこの半円分布が持っているということによる. この報告も通常の確率空間で独立性に基づく正規分布の特徴付けを free 性に基づく半円分布の特徴付けを行うものである.

定義 1.5.　中心が $m \in \mathbb{R}$, 半径 $r > 0$ の半円分布 $\omega_{m,r}(P(X))$ とは

$$\omega_{m,r}(P(X)) = \frac{2}{\pi r^2}\int_{m-r}^{m+r} P(t)\sqrt{r^2 - (t-m)^2}\, dt$$

なる関係式で定義される非可換確率空間における分布である. (通常の確率空間の見方でいえば, 密度関数の形状が半楕円である)

C^*- 確率空間 $(\mathcal{A}, \phi)$ において, 自己共役な確率変数 $x \in \mathcal{A}$ の分布が上の半円分布 $\omega_{m,r}$ のとき, 確率変数 x は中心 $m \in \mathbb{R}$, 半径 $r > 0$ の 半円的 (semicircular) であるという.

正規分布の場合と同様に, 半円分布は, 1 次モーメント, 2 次モーメント:

$$\omega_{m,r}(X) = m$$
$$\omega_{m,r}(X^2) = m^2 + \frac{r^2}{4}$$

によって一意に定まる. さらに, 中心 0, 半径 $r > 0$ の半円分布に従う確率変数 x の moment に関しては, 次の関係式を得る.

$$\begin{aligned} \phi(x^k) &= \frac{2}{\pi r^2} \int_{-r}^{r} t^k \sqrt{r^2 - t^2}\, dt \\ &= \begin{cases} 0 & (\, k = 2m+1\,) \\ \dfrac{(2m)!}{m!(m+1)!} \left(\dfrac{r^2}{4}\right)^m & (\, k = 2m\,), \end{cases} \end{aligned}$$

なお, $c_m = \dfrac{(2m)!}{m!(m+1)!}$ は m 次 Catalan 数と呼ばれる組み合わせ論でよく現れる数である.

C^*- 確率空間 $(\mathcal{A}, \phi)$ において, 自己共役な確率変数 $x \in \mathcal{A}$ の分布には $\mathbb{R}$ 上のコンパクトな台を持つ確率測度が対応するので, 自己共役な確率変数 $x(\neq 0)$ が中心 0 の半円的であるための必要十分条件は, 任意の $m \in N$ について次の関係を満たすことである.

$$\begin{cases} \phi(x^{2m+1}) = 0 \\ \phi(x^{2m}) = c_m \phi(x^2)^m (\neq 0). \end{cases}$$

通常の確率論において独立な確率変数の和の分布を考えることは重要である. 結果的には和の分布はいわゆる合成積 (convolution) で与えられる. この free 版が free additive convolution である.

定義 1.6. x_1, x_2 を, 分布 μ_{x_1}, μ_{x_2} にそれぞれ従う free な確率変数とする. このとき, 確率変数 $x_1 + x_2$ の分布 $\mu_{x_1+x_2}$ は, μ_{x_1}, μ_{x_2} にのみ依存して定まる. これを free (additive) convolution といい, $\mu_{x_1} \boxplus \mu_{x_2}$ とかく.

通常の確率論で convolution を用いて和の分布を計算するとき Fourier 変換は重要な役割りを果たす. 特に Fourier 変換の対数は cumulant 母関数と呼ばれ, この convolution を線形化するするものとして知られている. この free 版として, D. Voiculescu は R - 変換を導入した.

定義 1.7. $\mathbb{C}[X]$ 上の分布 μ について, ζ^{-1} の形式的冪級数

$$G_\mu(\zeta) = \zeta^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(X^k)\zeta^{-k-1},$$

を考える. この普通の合成に関する逆関数, すなわち

$$G_\mu(K_\mu(z)) = z \text{ かつ } K_\mu(G_\mu(\zeta)) = \zeta$$

となる関数 $K_\mu(z)$ を考える. この $K_\mu(z)$ は z の形式的冪級数として

$$K_\mu(z) = z^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{k+1} z^k,$$

なる形で与えられる. このとき, 分布 μ の R- 変換 $R_\mu(z)$ は,

$$R_\mu(z) = K_\mu(z) - \frac{1}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{k+1} z^k$$

と定義される.

性質 1.8. [VDN] R - 変換は次の関係式を満たす:

$$R_{\mu_{x_1} \boxplus \mu_{x_2}}(z) = R_{\mu_{x_1}}(z) + R_{\mu_{x_2}}(z)$$
$$R_{\mu_{\gamma x}}(z) = \gamma R_{\mu_x}(\gamma z)$$
$$R_{\mu_{x+\gamma 1}}(z) = R_{\mu_x}(z) + \gamma$$

R - 変換の例として, 中心 m, 半径 r の半円分布の R - 変換を挙げる.

$$R_{\omega_{m,r}}(z) = m + \frac{r^2}{4} z$$

一般に R - 変換に現れる係数は free cumulant と呼ばれている. R - 変換の定数項は平均 (1 次の free cumulant), また, 1 次の項の係数は分散 (2 次の free cumulant) である. 通常の確率論における正規分布の特徴付けとして 3 次以上の cumulant が 0 であるという性質があるが, このことは free 確率論において 3 次以上の free cumulant が 0 であるのは半円分布に限るというように言い換えられる. これも正規分布と半円分布のひとつの対応である.

この cumulants と moments の関係については, 可換の場合と非可換の場合との非常に興味深い対比が [Spe] で得られている. 以下, この関係の紹介を行う. そのためにいくつか記号を導入しよう.

$S(n) = \{1, 2, \ldots, n\}$ に対して P が $S(n)$ の分割 (partition) であるとは $P = \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m\}$ が$\pi_i \neq \phi$ $(1 \leq i \leq m)$ で $\pi_i \cap \pi_j = \phi$ かつ $\bigcup \pi_i = S(n)$ のと

きをいう. また, $S(n)$ および各 π_i を ordered set とみて, すべての i,j に対して $\pi_i=(v_1,\ldots,v_p)$, $v_1<\cdots<v_p$, $\pi_j=(w_i,\ldots,w_q)$, $w_i<\cdots<w_q$ とすれば

$$w_k<v_1<w_{k+1} \Longleftrightarrow w_k<v_p<w_{k+1} \quad (k=1,\ldots,q-1)$$

が成り立つとき, 分割 P は非交差 (non-crossing) であるという. これは同じ分割要素の元を線で繋いだとき, それらが交差しないという意味で名付けられている. $\wp(S(n))$ で $S(n)$ の分割全体を表すものとし, $NC\wp(S(n))$ で $S(n)$ の non-crossing 分割全体を表すものとする. もちろん $NC\wp(S(n))\subset\wp(S(n))$ である.

r_k で k 次の cumulant を表すものとする. このとき $r_1,r_2,\ldots,r_n$ と分割 $P=\{\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_m\}\in\wp(S(n))$ に対して

$$R(P)=\prod_{i=1}^{m} r_{|\pi_i|}$$

なる記号を導入する. ただし $|\pi_i|$ は分割要素 π_i の元の数をあらわすものとする. もちろん $\sum_{i=1}^{m}|\pi_i|=n$ である. このとき普通の確率論における moment-cumulant 関係式は, 以下の関係式で与えられることが知られている.

$$m_n=\sum_{P\in\wp(S(n))} R(P)$$

実は free 確率論においても同様の free moment - free cumulant 関係式が成り立つ. すなわち,

$$m_n=\sum_{P\in NC\wp(S(n))} R(P)$$

である. 違いは分割に対する和が非交差分割に制限されているだけである.

次に正規分布と free 確率論で重要な半円分布とを, 自然につなぐ例について紹介したい. これは正規分布の q - analogue である. ここで, パラメータ q は $[0,1]$ 区間を動く. 正規分布は直交多項式系である Hermite 多項式と密接な関係にある. すなわち, Hermite 多項式は正規分布の密度関数を重みに持つ直交多項式系である. この Hermite 多項式の q - analogue を考え, これを直交多項式系とする重み関数を作ることにより, 正規分布と半円分布を結ぶ one-parameter 分布族を得る.

正の整数 n に対して, q - 整数 $[n]_q$ を

$$[n]_q=\frac{1-q^n}{1-q}=1+q+\cdots+q^{n-1}, \quad [0]_q=0$$

と定義し, また q - 階乗を

$$[n]_q!=[1]_q\cdots[n]_q, \quad [0]_q!=1$$

と定義する. このとき q - Hermite 多項式は次のように帰納的に定義される多項式である.

定義 1.9. 正の整数 n に対して q - Hermite 多項式 $H_n^{(q)}$ は以下のように定義される.

$$H_0^{(q)}(x) = 1, \quad H_1^{(q)}(x) = x$$
$$xH_n^{(q)}(x) = H_{n+1}^{(q)}(x) + [n]_q H_{n-1}^{(q)}(x) \quad (n \geq 1)$$

このとき以下のような直交関係を得る.

性質 1.10. [LM] μ_q を区間 $[-2/\sqrt{1-q}, 2/\sqrt{1-q}]$ 上の測度で

$$\mu_q(dx) = \frac{1}{\pi}\sqrt{1-q}\sin\theta \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)|1-q^n e^{2i\theta}|^2 dx$$

ただし $x = \dfrac{2}{\sqrt{1-q}}\cos\theta,\quad \theta \in [0,\pi]$ とする. このとき q - Hermite 多項式は μ_q に関する直交多項式系である. すなわち,

$$\int_{-2/\sqrt{1-q}}^{2/\sqrt{1-q}} H_n^{(q)}(x)H_m^{(q)}(x)\mu_q(dx) = \delta_{nm}[n]_q!$$

なる関係を満たす.

$q = 1$ のときが, 通常の Hermite 多項式で重み関数が正規分布の密度関数であり, $q = 0$ のときの重み関数が半円分布の密度関数, すなわち free の場合に対応している.

2 半円分布系の特徴付け

この章では主として free 性を用いた半円分布系の特徴付けに関する結果の紹介を行う. 実質的には [HNY] および [HKNY] の内容を概説することになります.

通常の確率空間で独立に同一の分布に従う確率変数の族を i.i.d. (independently identically distributed) な族と呼んだ. そこで, C^*- 確率空間 $(\mathcal{A}, \phi)$ においても free であり, かつ自己共役な確率変数で全て同じ分布を持つとき f.i.d. (freely identically distributed) であると呼ぶことにする. また f.i.d. である確率変数の族の同一分布が標準半円分布であるときその確率変数の族を標準半円分布系 (standard semicircular system) と呼ぶことにする.

この標準半円分布系の特徴付けに関する結果の紹介を以下に行うことにする. 非可換確率空間は C^*- 確率空間で考え, 確率変数は自己共役とする. したがって先にも述べた通り分布を特徴付けるには, その高次の moment を特徴付ければ十分である.

まず Voiculescu によって示された free 性の回転不変性について触れておく.

定理 2.1. $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ を標準半円分布系とする. $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ を直交行列とし

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

とおくと $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ も標準半円分布系になる.

特徴付けに関して最初に紹介するのは確率変数の線形形式と 2 次形式の free 性に基づくものである. 確率変数のこれらの形式は統計量とも呼ばれ, 通常の確率論でもっとも単純かつ重要な線形統計量は標本平均である. また 2 次統計量で重要なものは標本分散であり, 実際この標本平均と標本分散の独立性から正規分布が特徴付けられる. この free 版が次の命題である. (係数行列 A と係数ベクトル $\mathbf{b}$ は標本分散, 標本平均の場合も含んでいる.)

定理 2.2. [HNY] $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を f.i.d. な中心的確率変数の族とする. $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ を $n \times n$ 非負定値実行列, また, $\mathbf{b} = {}^t(b_1, \cdots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ を n 次非負ベクトルとして.

$$A\mathbf{b} = 0, \quad \sum_i b_i a_{ii} \neq 0$$

を満たすものとする. このとき,

$$l = \sum b_i x_i$$
$$q = \sum a_{ij} x_i x_j$$

とおくと, l, q が free である為の必要十分条件は, $x_1, \cdots, x_n$ が半円分布に従うことである.

[十分条件] $\|\mathbf{b}\| = 1$ と仮定して良い. A の対称性, $A\mathbf{b} = 0$ より直交行列 $S = (s_{ij})$ で

$$SA^tS = diag\{\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, 0\}, \quad S\mathbf{b} = {}^t(0, \ldots, 0, 1)$$

となるものが選べる. ここで

$$y_i = \sum_{j=1}^n s_{ij} x_j$$

とおくと, 前定理より $y_1, y_2, \ldots, y_n$ は free となる. このとき, $q = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i y_i^2$, $l = y_n$ となるから, q, l は free となる. □

[必要条件] まず奇数次のモーメント $\phi(x_1^{2m+1})$ が 0 となることを帰納法で示す. $\phi(x_1) = 0$ は仮定より従う. $\phi(l) = 0$ と l, q の free 性より $\phi(lq^m) = \phi(l)\phi(q^m) = 0$. つまり

$$0 = \phi(lq^m) = \phi((\sum_i b_i x_i)(\sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j)^m)$$

となり, この右辺のモーメント展開を考える. $x_1^{2m+1}, x_2^{2m+1}, \ldots, x_n^{2m+1}$ の項をみると

$$\sum_i b_i a_{ii}^m \phi(x_1^{2m+1})$$

という項が現れることがわかる. $x_1^{2m+1}, x_2^{2m+1}, \ldots, x_n^{2m+1}$ 以外の項のモーメント展開を考えると, 少なくとも 2 つ以上の変数が混ざっていること, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に関す

る $2m+1$ 次（奇数次）の斉次式になっていることがわかる．$2m+1$ より小さい奇数次のモーメントは 0 であるという帰納法の仮定よりこれらの項は全て消えてしまうことになる．従って

$$\sum_i b_i a_{ii}^m \phi(x_1^{2m+1}) = 0$$

となり $\phi(x_1^{2m+1}) = 0$ となる．

同様の方針で偶数次のモーメント $\phi(x_1^{2m})$ が $\phi(x^2)^m$ の定数倍 α_m となることを示す．l, q の free 性より

$$\phi(l^2 q^{m-1}) = \phi(l^2)\phi(q^{m-1}).$$

両辺を別々に計算していく．$x_1, x_2, \ldots, x_n$ の free 性より

$$\phi(l^2) = \phi((\sum_i b_i x_i)^2) = \sum_{i,j} b_i b_j \phi(x_i x_j) = (\sum_i b_i^2)\phi(x_1^2).$$

帰納法の仮定と既に示した奇数次のモーメントが 0 に注意すると，

$$\phi(q^{m-1}) = \phi((\sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j)^{m-1})$$

のモーメント展開で，奇数次のモーメントを含む項は消え，偶数次のモーメントの項は $\alpha_k, \phi(x_1^2)^k$ $(k < m)$ で表示される．つまり

$$\phi(q^{m-1}) = F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1})\phi(x_1^2)^{m-1}$$

と表される．同様に

$$\phi(l^2 q^{m-1}) = \phi((\sum_i b_i x_i)^2 (\sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j)^{m-1}))$$

のモーメント展開を考える．$x_1^{2m}, x_2^{2m}, \ldots, x_n^{2m}$ の項をみると

$$(\sum_i b_i^2 a_{ii}^{m-1})\phi(x_1^{2m})$$

という項が現れることがわかる．$x_1^{2m}, x_2^{2m}, \ldots, x_n^{2m}$ 以外の項は上と同じ理由で，奇数次のモーメントを含む項は消え，偶数次のモーメントの項は $\alpha_k, \phi(x_1^2)^k$ $(k < m)$ で表示されることになる．従って

$$\phi(l^2 q^{m-1}) = (\sum_i b_i^2 a_{ii}^{m-1})\phi(x_1^{2m}) + G(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1})\phi(x_1^2)^m$$

となる．つまり

$$\phi(x_1^{2m}) = \frac{F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}) - G(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1})}{\sum_i b_i^2 a_{ii}^{m-1}}\phi(x_1^2)^m$$

となり, 帰納的に示されたことになる.

これらの計算は. ϕ の線形性, 各変数の ϕ に関する free 性にのみ依存している. 従って, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ として特に標準半円分布系を考えると既に十分性の証明でみたように l, q が free となるので, 上の定数 $\alpha_k = C_k$ (カタラン数) となる. 従ってこの命題の条件を満たす分布は半円分布に限ることがわかる. □

上の証明のように特殊な期待値のモーメント展開と線形性, free 性とによって定まる普遍定数を決定することによって半円分布であることを確認することが可能である。もちろん R-変換は分布を決定するための強力な道具でもあり, 多くの局面で有用であることは疑うまでも無いことである. だが上の命題のようなタイプの問題には必ずしも有効ではなく直接的なモーメントの変形が有効なこともある. 次の回転不変性による半円分布の特徴付けは, Nica による R-変換の多変数版の応用として証明されたが, 我々の方針による証明も可能である.

定理 2.3. [Ni], [HNY]　$C = (c_{ij})$ を $n \times n$ 直交行列であり, 両側にいかなる置換行列の積をそれぞれ施しても, よりサイズの小さな直交行列の直和にならないという意味で分解不可能であるとする. $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を f.i.d. な確率変数の族とするとき,

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j, \qquad i = 1, \cdots, n$$

で $y_1, \cdots, y_n$ も互いに free である為には $x_1, x_2, \cdots, x_n$ が同一の半円分布に従うことが必要十分である.

以下の定理も free を独立に, 半円分布を正規分布にすれば, 通常の確率論では成り立つことが知られている正規分布の特徴付け問題の free 版である. この命題もモーメントを調べる方法で証明することが可能ではあるが, むしろ R-変換が非常に有効であることが実感できる良い練習問題である.

定理 2.4. [HKNY]　$x_1, x_2, \cdots, x_n$ を同一分布に従う, 互いに free な中心的な確率変数の族とする. $a_1. \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ (ただし $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 1$) に対して, $\sum a_i x_i$ と x_1 が同一分布に従う為の必要十分条件は, $x_1, \cdots, x_n$ が半円分布に従うことである.

このように述べると, 一見, 通常の確率論で成り立つ正規分布の特徴付け問題がすべて free 版に持ち込めるように思えるが, 重要な正規分布の特徴付けに関する定理 (Cramér の定理) の free 版が成り立たないことを注意しておく. 通常の確率論において, Cramér の定理は正規分布の特徴付けを行う命題の証明によく用いられる. したがってこの定理の free 版が成り立たないのは, これら半円分布の特徴付け問題が free 確率論において意味のある問題であることを支持していると思われる.

Cramér の定理　X_1, X_2 を互いに独立な確率変数とする. $X_1 + X_2$ が正規分布に従うならば, X_1, X_2 もまた正規分布に従う.

この定理における独立を free に, 正規分布を半円分布に置き換えた, free 確率論における, この定理の反例は [BV] で与えられている.

通常の確率論において正規分布から導出される数々の重要な分布がある. χ^2 分布もそのひとつである. 次の定理は分布が正規であるような i.i.d. な確率変数族の特徴付けであると同時に χ^2 分布を特徴付ける命題の free 版である.

定理 2.5. [HKNY] $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を互いに free かつ centered 同一分布に従う確率変数とするとき,

$$y = \sum_{i=1}^{n}(x_i + a_i)^2, \qquad a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$$

の従う分布が $a = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$ にのみ依存する為の必要十分条件は $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ が半円分布系となることである.

ここで現れる y を非心 χ^2 分布の free 版と考えようというわけである. この y の R-変換の形をみておくと,

定理 2.6. [HKNY] x が標準半円分布に従う確率変数であるとき, $(x+m)^2$ $(m \in \mathbb{R})$ の従う分布の R - 変換は

$$R_{(x+m)^2}(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{m^2}{(1-2z)^2}$$

とあらわされる.

これらの計算結果より定理 2.5 の y の分布が特徴付けられる. この y は先ほども述べたように通常の確率論では非心 χ^2 分布として知られているものの free 版に相当する. そこで以下のような定義を行う.

定義 2.7. $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ を標準半円系, $\delta = \sum_{i=1}^{n} m_i^2$ $(m_i \in \mathbb{R})$ とする. 確率変数 $\sum_{i=1}^{n}(x_i + m_i)^2$ の従う分布$\chi^2(n, \delta)$ は, 自由度 n , 非心パラメータ δ の free χ^2 分布とよぶ.

R - 変換でいえば, 確率変数 q が, 分布$\chi^2(n, \delta)$ に従うとは,

$$R_q(z) = \frac{n}{1-z} + \frac{\delta}{(1-2z)^2}$$

を満たすことである. 特に$\delta = 0$ であるとき, free χ^2 分布は central, $\delta \neq 0$ であるときは, noncentral であるという.

また通常の確率論の場合と同様に, この分布族は次の再生性を有している. すなわち, q_1 , q_2 を free な確率変数とし, それぞれの従う分布が$\chi^2(n_1, \delta_1)$, $\chi^2(n_2, \delta_2)$ と

する. このとき q_1+q_2 の従う分布は $\chi^2(n_1+n_2,\delta_1+\delta_2)$ に等しい. つまり記号的に書けば

$$\chi^2(n_1,\delta_1)+\chi^2(n_2,\delta_)=\chi^2(n_1+n_2,\delta_1+\delta_2)$$

である.

以下に述べる結果は通常の確率論で χ^2 分布について成り立っている結果の free 版である. 以下の結果より, free χ^2 分布は無理なく定義されたものであり, 自然な free analogue であることを示している.

定理 2.8. [HKNY] $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ を標準半円分布系とし, $A=(a_{ij})$ を $n\times n$ 対称行列, $q=\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j$ とすると, q が free χ^2 分布に従うための必要十分条件は $A^2=A$.

定理 2.9. [HKNY] $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ を半円分布系とする. $n\times n$ 対称行列 $A=(a_{ij}),B=(b_{ij})$ について, 2 次形式統計量 $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j$, $\sum_{i,j=1}^n b_{ij}x_ix_j$ が互いに free であるための必要十分条件は $AB=0$ である.

定理 2.10. [HKNY] $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ を標準半円分布系とする. $n\times n$ 対称行列 $A_i=(a_{jk}^{(i)})$ について

$$y_i=\sum_{j,k=1}^n a_{jk}^{(i)}x_jx_k,\quad i=1,\cdots,m$$

とおく. $A=\sum_{i=1}^m A_i$ に対して $A=A^2$ である時, 以下は同値.

(1) y_i $(i=1,\cdots,m)$ の分布は free χ^2 乗分布
(2) $y_1,\cdots,y_n$ は 互いに free
(3) $\mathrm{rank}A=\sum_{i=1}^m \mathrm{rank}A_i$.

定理 2.10. は, 通常の確率論では Cochran-Fisher の定理と呼ばれている.

参考文献

[BV] H. Bercovici and D. Voiculescu : Superconvergence to the central limit and failure of the Cramér theorem for free random variables, Probab. Theory Relat. Fields **102** (1995), 215–222.

[HKNY] O. Hiwatashi, T. Kuroda, M. Nagisa and H. Yoshida : The free analogue of noncentral chi-square distributions and symmetric quadratic forms in free random variables, preprint 1997.

[HNY] O. Hiwatashi, M. Nagisa and H. Yoshida : The characterizations of a semicircle law by the certain freeness in a C*-probability space, preprint 1997.

[LM] H. van Leeuwen and H. Maassen : A q - deformation of the Gauss distribution, J. Math. Phys. **36** (1995), 4743–4756.

[Ni] A. Nica : $R-$ transform of free joint distributions and non-crossing partition, J. Funct. Anal. **135** (1996), 271–296.

[Spe] R. Speicher : Multiplicative functions on the lattice of non-crossing partition and free convolution, Math. Ann. **298** (1994), 611–628.

[VDN] D. Voiculescu, K. Dykema, A. Nica : *Free random variables*, CMR Monograph Series, volume 1, AMS, 1992.